Instituto de Matemática
Campus Curicó
08/08/2018

# Prueba Recuperativa Nº3
# Álgebra lineal

| Apellido paterno: | Apellido materno: | Nombre: |
|---|---|---|
| | | |

| Pregunta 1 | Pregunta 2 | Pregunta 3 | Total | Nota |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

<u>Instrucciones</u>:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

**Nota** $= 1 + \frac{Puntos}{10}$. **Duración** = 60 minutos

---

1) **[25 ptos]** Sean $V = W = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Se define la función $T : V \longrightarrow W$ transformación lineal, definida por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b+c \\ b+c & d \end{bmatrix}$$

   *a*) **[10 ptos]** Determine bases y dimensiones tanto del $\mathrm{Ker}(T)$ como de la $\mathrm{Im}(T)$.

   *b*) **[8 ptos]** Halle la matriz asociada a $T$ respecto a

   $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ base del espacio de partida $V$ y

   $\mathcal{B}_2 = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ base canónica del espacio de llegada $W$.

   *c*) **[7 ptos]** ¿$T$ es un epimorfismo?, ¿$T$ es un isomorfismo?. **(Justifique)**

2) **[15 ptos]** Construya una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}_2[x]$ tal que

$$\mathrm{Im}(T) = \langle x^2 + 3x, 2x + 1 \rangle \quad \text{y} \quad \mathrm{Ker}(T) = \langle (1, -2, 3) \rangle.$$

3) **[20 ptos]** Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

   *a*) **[15 pts]** Halle los valores y vectores propios de $A$.

   *b*) **[5 pts]** Halle la matriz invertible $P$ tal que $P^{-1}AP$ es la matriz diagonal $D$ formada por los valores propios de $A$.

## Pauta :

1) *a*)

- $$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(T) &= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2 \,:\, T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\} \\ &= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2 \,:\, \begin{bmatrix} a & b+c \\ b+c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\} \\ &= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2 \,:\, a=d=0,\, c=-b\right\} = \left\{\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2 \,:\, b \in \mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

  Por lo tanto $\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{bmatrix}\right\}$ es base del $\mathrm{Ker}(T)$ **[3 pts]**

  ..........................................................................................

- $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$. **[3 pts]**

  ..........................................................................................

- como $\dim(\mathcal{M}_2) = 4$, entonces $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$ **[2 pts]**

  ..........................................................................................

- $\mathrm{Im}(T) = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\right\}$ **[3 pts]**

  ..........................................................................................

*b*) Note que

$$\left.\begin{aligned}
T\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3\end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3\end{bmatrix} = 1\cdot b_1 + 0\cdot b_2 + 0\cdot b_3 + 3\cdot b_4 \\
T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} = 1\cdot b_1 + 0\cdot b_2 + 0\cdot b_3 + 1\cdot b_4 \\
T\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2\end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2\end{bmatrix} = 0\cdot b_1 + (-1)\cdot b_2 + (-1)\cdot b_3 + 2\cdot b_4 \\
T\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} = 0\cdot b_1 + 0\cdot b_2 + 0\cdot b_3 + 0\cdot b_4
\end{aligned}\right. \implies [T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

**[8 pts]**

**Observación : [1 pto]** cada evaluación y **[4 pts]** $[T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$

..........................................................................................

*c*)

- No es un epiyectiva, pues $\dim(\mathrm{Im}(T)) \neq 4 = \dim(W)$. **[3 pts]**

  ..........................................................................................

- No es un isomorfismo, pues $\dim(\mathrm{Ker}(T)) \neq 0$. **[4 pts]**

  ..........................................................................................

2)

- Consideremos $\mathbb{B} = \{(1,-2,3),(1,0,0),(0,0,1)\}$ base de $\mathcal{R}^3$ y $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}_2[x]$ tal que $T(1,-2,3) = 0x^2 + 0x + 0$, $\quad T(1,0,0) = x^2 + 3x \quad$ y $\quad T(0,0,1) = 2x + 1$ **[6 pts]**

.............................................................................................

- Como $(a,b,c) = -\dfrac{b}{2}\cdot(1,-2,3) + \dfrac{2a+b}{2}\cdot(1,0,0) + \dfrac{2c+3b}{2}\cdot(0,0,1)$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
T(a,b,c) &= -\frac{b}{2}\cdot T(1,-2,3) + \frac{2a+b}{2}\cdot T(1,0,0) + \frac{2c+3b}{2}\cdot T(0,0,1)\\
T(a,b,c) &= -\frac{b}{2}\cdot(0x^2+0x+0) + \frac{2a+b}{2}\cdot(x^2+3x) + \frac{2c+3b}{2}\cdot(2x+1)\\
T(a,b,c) &= \left(a+\frac{b}{2}\right)x^2 + \left(3a+\frac{9}{2}b+2c\right)x + c + \frac{3}{2}b
\end{aligned}$$

**[8 pts]**

.............................................................................................

3) *a*) Calculemos el polinomio característico

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) = |A-\lambda\mathbb{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2\\ 0 & 1-\lambda & -1\\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1\\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}\\
&= (1-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(-1-\lambda)\\
&= -(1-\lambda)^2(1+\lambda)
\end{aligned}$$

Luego, los valores propios son: $\lambda = 1$ (raiz doble), $\lambda = -1$.

**[5 pts]**

.............................................................................................

- Para $\lambda = -1$, debemos resolver el sistema $(A+\mathbb{I})\cdot\vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \Longleftrightarrow \left(-z, -\frac{z}{2}, z\right) = z\left(-1, \frac{1}{2}, 1\right)$$

Luego, una base de $\mathbf{E}_{-1}$ es $\mathfrak{B}_{\mathbf{E}_{-1}} = \left\{\left(-1, \frac{1}{2}, 1\right)\right\}$. **[5 pts]**

.............................................................................................

- Para $\lambda = 1$, debemos resolver el sistema $(A-\mathbb{I})\cdot\vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \Longleftrightarrow (x,y,0) = x(1,0,0) + y(0,1,0)$$

Luego, una base de $\mathbf{E}_1$ es $\mathfrak{B}_{\mathbf{E}_1} = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$ **[5 pts]**

.............................................................................................

*b*) Luego $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ y $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ las cuales cumplen que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**[5 pts]**

.................................................................................